

E

أمثلة: E إذا كانت f دالة ثابتة

$$f: D \rightarrow f; x \rightarrow f(x) = c$$

فإن قابلية التفاضل في كل نقطة داخلية من D هو التطبيق الصفري L في f وعندئذ:

$$df: D^0 \rightarrow f(E, f)$$

$$x \rightarrow df(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c - 0}{\|h\|} = 0$$

E الدالة الحقيقية بتغيرين:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin x^2 y^2}{(e^{x^2} - 1)(e^{y^2} - 1)} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

قابلية التفاضل عند النقطة $(0, 0)$ وتفاضلها.

$df(0,0)$ هو التطبيق الصفري

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h+k, 0) - f(0,0) - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h \sin h^2 \cdot k^1}{(e^{h^2} - 1)(e^{k^2} - 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h \sin h^2 \cdot k^2}{(e^{h^2} - 1)(e^{k^2} - 1)(h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin h^2 \cdot k^2}{h^2 \cdot k^2} \cdot \frac{h^2}{(e^{h^2} - 1)} \cdot \frac{k}{(e^{k^2} - 1)} \cdot \frac{h \cdot k}{(h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin h^2 \cdot k^2}{h^2 \cdot k^2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{(e^{h^2} - 1)} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{(e^{k^2} - 1)} \cdot \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h \cdot k}{(h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= |x| \cdot |x|, x, 0 = 0$$

E

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h \cdot k}{(h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

= hk

أي أن f قابلة للتفاضل في النقطة $(0,0)$
 $df(0,0) = 0$ وتفاضل

□ إن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x,y) \rightarrow xy$
 قابلة للتفاضل في كل نقطة (x_0, y_0) من \mathbb{R}^2
 $df(x_0, y_0)$ ، أن تفاضلا
 هو الدالة الخطية

$$df(x_0, y_0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (h,k) \rightarrow dF(h,k) = y_0 h + x_0 k$$

(x_0, y_0)

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h+x_0, k+y_0) - f(x_0, y_0) - (y_0 h + x_0 k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h+x_0)(k+y_0) - (y_0 h + x_0 k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h \cdot k + h \cdot y_0 + x_0 \cdot k + x_0 \cdot y_0 - x_0 y_0 - y_0 h - x_0 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

أي أن الدالة قابلة للتفاضل في كل نقطة (x_0, y_0) من \mathbb{R}^2 وتفاضلها
 $df(x_0, y_0) = y_0 h + x_0 k$

□ الدالة $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x,y) \rightarrow (x+y, xy)$
 قابلة للتفاضل في كل نقطة (x_0, y_0) من \mathbb{R}^2 وتفاضلها هو التطبيق الخطي

$$df(x_0, y_0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (h,k) \rightarrow (h+k, y_0 h + x_0 k)$$

المعيار المصفوفي $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ عند الدالتين المركبتين

$$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow x + y$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow x \cdot y$$

قابليتين للمفاضلة في كل نقطة (x_0, y_0) من \mathbb{R}^2 وذلك لأن
لنزدن على قابلية المفاضلة للدالة f_1

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_1(x_0+h, y_0+k) - f_1(x_0, y_0) - h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{x_0 + h + y_0 + k - x_0 - y_0 - h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

ومنه فإن f_1 قابلة للمفاضلة في كل نقطة (x_0, y_0) من \mathbb{R}^2 ولقد رأينا سابقاً أن f_2 قابلة

للمفاضلة في كل نقطة (x_0, y_0) من \mathbb{R}^2 وتفاضلها $df_{f_2}(x_0, y_0)(h, k)$

$$df_{f_2}(x_0, y_0)(h, k) = y_0 \cdot h + x_0 \cdot k$$

يتبع أن الدالة f_2 قابلة للمفاضلة في كل نقطة (x_0, y_0) من \mathbb{R}^2 .

مبرهنة: لكن f, g دالتين معرفتين على المجموعة الجزئية D من E وتأخذ قيمهما F
و لنفرض أنهما قابليتان للمفاضلة في النقطة الداخلية α من D عندئذ فإن:

[1] $f+g$ قابلة للمفاضلة في النقطة α وتفاضلها

$$d(f+g)_\alpha = df_\alpha + dg_\alpha$$

[2] إذا كان f عدداً حقيقياً فإن الدالة ff قابلة للمفاضلة في α وتفاضلها

$$d(ff)_\alpha = f df_\alpha$$

البرهان: **[1]** بما أن كل من f, g قابلة للمفاضلة في النقطة α فإن توجود دالتين ϕ, ψ
معرّفتان على جوار α للنقطة α في E بحيث يكون:

$$\star f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \varepsilon_1(h); \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

$$g(a+h) = g(a) + dg_a(h) + \|h\| \varepsilon_2(h); \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

وذلك ما نحتاجه

وبجمع المادتين طرفاً إلى طرف نجد:

$$(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + (df_a + dg_a)(h) + \|h\|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(h) = 0$$

وبما أن $df_a + dg_a$ تطبيقاً خطياً

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(h) = 0$$

فإننا نستنتج أن الدالة $f+g$ قابلة للتفاضل في النقطة الداخلية a من D وأن تفاضلاً $df_{f+g} = df_a + dg_a$

[2] إذا ضربنا طرفي * بالعدد الحقيقي ρ ينتج

$$(\rho f)(a+h) = (\rho f)(a) + (\rho df_a)(h) + \|h\|(\rho \varepsilon_1)(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho \varepsilon_1(h) = 0$$

وبما أن ρdf_a دالة خطية فإن $\lim_{h \rightarrow 0} (\rho \varepsilon_1)(h) = 0$

فإننا نستنتج أن الدالة ρf قابلة للتفاضل في النقطة الداخلية a من D وأن تفاضلاً $d(\rho f)_a = \rho df_a$

مثال: لكن α, β, γ أعداد حقيقية في \mathbb{R} غير سالبة $\alpha + \beta + \gamma > 1$ أثبت أن الدالة الحقيقية f المعروفة على \mathbb{R}^3 بالشكل

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + |x|^\alpha |y|^\beta |z|^\gamma$$

قابلة للتفاضل في النقطة $(0,0,0)$ وأوجد تفاضلا في هذه النقطة.

لأخذنا الدالة: $u(x,y,z) = |x|^q \cdot |y|^p \cdot |z|^8$

نلاحظ أن: $0 \leq \frac{|x|^q \cdot |y|^p \cdot |z|^8}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|x|^q \cdot |y|^p \cdot |z|^8}{[\sup(|x|, |y|, |z|)]^{\frac{1}{2}}}$

$\leq \frac{\sup(|x|, |y|, |z|)^{q+p+8}}{\sup(|x|, |y|, |z|)} = (\sup(|x|, |y|, |z|))^{q+p+8-1}$

وبما أن

$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} [\sup(|x|, |y|, |z|)]^{q+p+8-1} = 0$

وهذا $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{|x|^q \cdot |y|^p \cdot |z|^8}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$

أي أنه

$\lim_{(h,k,L) \rightarrow (0,0,0)} \frac{(h+0, k+0, L+0) - u(0,0,0)}{\sqrt{h^2+k^2+L^2}} = 0$

$\lim_{(h,k,L) \rightarrow (0,0,0)} \frac{h|k|^p |L|^8 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2+L^2}} = 0$

أي أن الدالة $u(x,y,z)$ قابلة للتفاضل وتفاضلها هو الدالة الصفرية.

وإذا وضحنا $v(x,y,z) = ax + by + cz$ فإن v قابلة للتفاضل وتفاضلها $ah + bk + cL$ وذلك لأن

$\lim_{(h,k,L) \rightarrow (0,0,0)} \frac{v(h+0, k+0, L+0) - v(0,0,0) - (ah + bk + cL)}{\sqrt{h^2+k^2+L^2}} = 0$
 $= \lim_{(h,k,L) \rightarrow (0,0,0)} \frac{ah + bk + cL - 0 - ah - bk - cL}{\sqrt{h^2+k^2+L^2}} = 0$

أعني أن الدالة V قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0,0)$ وتفاضلها $dV_{(0,0,0)}(h,k,l) = ah + bk + cl$

وحسب المبرهنه الأخيرة (1) تكون الدالة

$$f(x,y,z) = V(x,y,z) + u(x,y,z)$$

قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0,0)$ وتفاضلها

$$df_{(0,0,0)}(h,k,l) = dV_{(0,0,0)}(h,k,l) + du_{(0,0,0)}(h,k,l)$$

أعني

$$df_{(0,0,0)}(h,k,l) = ah + bk + cl + 0$$

المشتقات الجزئية:

تعريف: لنكن $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ و $x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x)$ و $D \subseteq \mathbb{R}^n$ دالة حقيقية لعدة متغيرات و $a = (a_1, \dots, a_n)$ نقطة داخلية في D لغرض الدالة الحقيقية بتغير حقيق واحد.

$$\psi_{ij}: D_{ij} \rightarrow \mathbb{R}; x_{ij} \rightarrow \psi_{ij}(x_{ij}) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_{ij}, a_{j+1}, \dots, a_n) \quad \text{حيث}$$

$$D_{ij} = \{x_{ij} \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{j-1}, x_{ij}, a_{j+1}, \dots, a_n) \in D\}$$

نقول أن الدالة f مشتقة جزئياً بالنسبة للمتغير x_{ij} في النقطة a إذا و فقط إذا كانت الدالة ψ_{ij} قابلة للاشتقاق في النقطة a_{ij} وبالتالي، إذا و فقط إذا وجدت النهاية:

$$\begin{aligned} & \lim_{h_{ij} \rightarrow 0} \frac{\psi_{ij}(a_{ij} + h_{ij}) - \psi_{ij}(a_{ij})}{h_{ij}} \\ &= \lim_{h_{ij} \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{ij} + h_{ij}, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{ij}, a_{j+1}, \dots, a_n)}{h_{ij}} \end{aligned}$$

وعندئذ نسمى هذه النهاية (العدد) المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير x_i للدالة f في النقطة a ونرمزه بـ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

$$D_{x_i} f(a), f_{x_i}(a), f'_{x_i}(a), \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

وإذا كانت الدالة f مشتقة جزئياً بالنسبة للمتغير x_i في كل نقطة من مجموعة مفتوحة V من \mathbb{R}^n فإننا نرمز بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x_i}, f_{x_i}, f'_{x_i}, D_{x_i} f$ للدالة:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \rightarrow \mathbb{R}; (a_1, \dots, a_n) \rightarrow \psi_{x_i}(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

وسمى الدال $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ المشتقات الجزئية

الأولى للدالة f بالنسبة لـ x_1, x_2, \dots, x_n على الترتيب.

تسوية: إذا كانت الدالة الحقيقية

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية $a = (a_1, \dots, a_n)$ من D فإن لها مشتقات جزئية بالنسبة للمتغيرات x_1, x_2, \dots, x_n في النقطة a وبالاشتقاق والاستناد إلى (1) من الحالات الخاصة لقابلية المفاضلة توجد أعداد حقيقية A_1, A_2, \dots, A_n ودالة حقيقية ε معرفة على جوار w للنقطة 0 من \mathbb{R}^n بحيث إذا كان $h = (h_1, \dots, h_n) \in w$ فإن:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot h_i + \|h\| \cdot \varepsilon(h) \text{ و } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

وبالتالي إذا وضعنا $w_j = \{h_j \in \mathbb{R}, \dots, h_j \in \mathbb{R}, \dots, 0\} \in w$ وكان $h_j \in w_j$ فنقول:

$$\psi_j(a_j + h_j) - \psi_j(a_j) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, h_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)$$

$$= A_j \cdot h_j + \|R_j\| \varepsilon(R)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{f_j(a_j + h_j) - f_j(a_j)}{h_j}$$

درین

$$= \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{A_j h_j + \|R_j\| \varepsilon(R)}{h_j} = A_j$$

و عندئذ می‌توان نوشت:

$$f(a+R) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \|R\| \cdot \varepsilon(R)$$

$$\Delta f_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot h_i$$